Cálculo Numérico

11/5/2016 | Examen final | Curso 2015-2016

Apellidos: ________________ ________________ **Nombre:** ________________ **Grupo:**

Hay que justificar todas las respuestas | **Duración del examen: 3 horas**

Cada ejercicio vale 2.5 puntos

---

1. Se considera la ecuación $x + e^x = a$.
a) Demostrar que para todo a real, esta ecuación tiene una única solución x_a.
b) Escribir el método de punto fijo para resolver esta ecuación, aplicándolo a la función $g(x) = a - e^x$. Demostrar que este método converge para $a < 1$ y diverge para $a > 1$.
c) Sugerir un método iterativo para calcular la solución de la ecuación para $a > 1$.
d) Definir el orden de convergencia de un método iterativo. ¿Qué órdenes de convergencia tienen los métodos usados?

---

2. a) Se considera la función $f(x) = 12/(x+1)$. Calcular el polinomio interpolador P de la función f con los nodos en los puntos $0, 1, 2, 3$ y estimar $\max_{[0,3]} |f - P|$.
b) Se quiere aproximar $f(x)$ en el intervalo [0,3] usando interpolación lineal a trozos con un error menor que 10^{-4}. ¿Cuántos nodos equiespaciados son necesarios?

---

3. a) Sea A una matriz $m \times n$ tal que $\ker A = 0$ y sea $b \in \mathbb{R}^m$ un vector de datos. Dar la definición general de la solución de un sistema lineal $Ax_0 = b$ sobredeterminado en el sentido de los mínimos cuadrados.
b) Calcular la factorización QR reducida de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.
c) Utilizar esta factorización para resolver en el sentido de mínimos cuadrados el sistema $Ax = b$, donde $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

---

4. Para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ se considera la fórmula de cuadratura

$$I(f) = w_1 f(-\alpha) + w_2 f(2\alpha).$$

a) Encontrar w_1, w_2 y α, $\alpha > 0$, para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.
b) Con w_1, w_2, α encontrados en el apartado a) ¿es exacta para polinomios de grado 3?
c) Escribir la correspondiente fórmula de cuadratura para el intervalo [0,1].
d) Escribir la correspondiente fórmula compuesta en [0,5] dividido en 5 subintervalos iguales.